Petit panorama de différents travaux autour de l'enseignement et de l'apprentissage de la démonstration

Argumentation/démonstration

Raymond Duval (1993)
Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture,
Petit X n°31, IREM de Grenoble.

Montrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

« Un multiple de 7 c'est 7 fois quelque chose. Alors la somme de deux multiples de 7 c'est 7 fois quelque chose plus 7 fois autre chose, et ça fait bien 7 fois quelque chose. Par exemple, 14=7x2, 35=7x5, 14+35=49=7x7.»

« Comme un multiple de 7 c'est 7+7+7+…=multiple de 7. Donc c'est 7+7+7+..+7+7+7+…=multiple de 7. »

« 35+21=56 et 56:7=8, 105+21=126 et 126:7=18, 56+784=840 et 840:7=120, 14+56=70 et 70:7=10, 42+294=336 et 336:7=48, 7+42=49 et 49:7=7 »

« Par exemple 14+21=35 »

«Par exemple 14+21=7x2+7x3=7x5=35 »

Explication, preuve, démonstration

Nicolas Balacheff(1987) Processus de preuve et situations de validation, Educational Studies in Mathematics n°18.

Nous appelons **explication** un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent atre discutées, refusées ou acceptées.
Nous appelons **preuve** une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.
Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées: un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons **démonstrations** ces preuves.

Différents types de preuves

Plusieurs types de preuves, des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles :

- l'empirisme naïf, « consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion »
- l'expérience cruciale, « l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnait pour aussi peu particulier que possible »
- l'exemple générique, « explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui- même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. »
- l'expérience mentale, « invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. »

Processus/produit

Recherche/rédaction

Idées/structure

Ça se fait de façon dialectique.

Travail sur la preuve/travail sur les objets

Du côté de l'IREM de Grenoble, de nombreuses situations de recherche pour la classe(SiRC).

Preuve et conceptualisation

Faire de preuves, ça aide à comprendre ce que sont les objets et leurs relations.

Par exemple, les démonstrations du sens de variation d'une fonction en Seconde (avant la dérivée !) aident à comprendre la définition comme « deux nombres et leurs images sont toujours dans le même ordre ».

Fonction d'explication, fonction de validation

Somme des n premiers entiers :
Démonstration par récurrence,
Démonstration (?) comme le petit Gauss.

Les « règles » de la démonstration

À l'IREM de Grenoble toujours, une pratique du débat scientifique, par exemple avec l' activité circuit qui permet de mettre en place des connaissances sur l'implication.
L'activité *Cosmonautes* permet de voir quelles déductions sont valides ou non.

Zoé Mesnil (2021) *Utiliser ou démontrer une implication.* Au fil des Maths n°542.

Exemple 11[3]

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

Les quantificateurs

Une difficulté bien connue de la transition lycée-université : le passage à un langage plus formel, dans lequel notamment les quantifications sont exprimées par des quantificateurs, ce qui amènent forcément plus de variables…

Quantification implicite : « le carré d'un nombre réel est positif », explicite : « le carré d'un nombre réel est toujours positif », explicite exprimée avec un quantificateur : « quel que soit le réel x, le carré de x est positif ».
Mais aussi « si $(x-1)(x-2)=0$ alors $x=1$ »
C. Hache et E. Fourgeoux (2018) Vrai ou faux : parlons-en ! Au fil des maths n°528.

Les quantificateurs

Démontrer des énoncés quantifiés, utiliser des énoncés quantifiés dans des preuves, aide à donner du sens aux quantificateurs.

Par exemple, la démonstration du sens de variation d'une fonction est un premier exemple de démonstration d'une implication universellement quantifiée, comme dans l'initialisation de la récurrence.
On n'a pas la même « liberté » quand on doit démontrer « Pour tout x, P[x] » ou quand on peut utiliser « Pour tout x, P[x] ».

Écrire une preuve

Plusieurs publications du côté de
l'IREM de Rennes,
Par exemple,
quelle démonstration pour quel texte ?

Difficulté bien repérée : difficulté des élèves avec le changement du statut opératoire des propositions (hypothèse, théorème, conclusion), cf travaux de R. Duval, confusion entre valeur épistémique théorique et valeur épistémique sémantique, cf D. Tanguay.

Balacheff N., Demongeot C., Gandit M., Garnier R., Hilt D., Houdebine J., Juhel M.-A. (2001) Preuve et démonstration : quelques questions essentielles. IREM de Grenoble et de Rennes.