Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

Modèle et implication : un circuit électrique

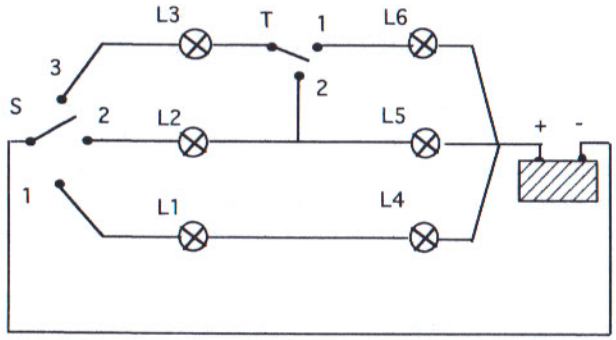
Entrer dans le monde mathématique ne va donc pas de soi ! Il y a un pas à franchir pour passer du monde dans lequel nous vivons à celui des mathématiques. Comment aider nos élèves à franchir l'obstacle ? Nous avons choisi, non pas de rendre le passage aisé, mais d'orienter notre jeu vers la prise de conscience par les élèves qu'il existe un changement radical de mode de pensée lorsque l'on passe du réel aux mathématiques.

Nous vous proposons une activité permettant d'expliciter quelques spécificités du raisonnement mathématique sous le nom de "Circuit". Elle est proposée dans une brochure écrite par Marc Legrand, didacticien et professeur de mathématiques à l'université, intitulée "Enseigner autrement en DEUG A à l'université". Elle a été expérimentée dans de nombreuses classes, de la quatrième à l'université.

Voici comment elle est présentée à une classe d'élèves de lycée, un amphithéâtre d'étudiants de l'université ou à un groupe d'adultes en formation.

Essayez de la vivre vous-même en lisant ces pages.

Voici un circuit électrique.



Il va vous être proposé un certain nombre de phrases, relatives à ce circuit, que l'on appellera des conjectures, car on ne sait pas a priori leur valeur de vérité. Vous devez vous demander si elles sont vraies ou fausses. Pour chacune d'elles, qui est écrite en caractères gras, essayez de procéder de la manière suivante : vous la lisez et vous vous accordez un moment de réflexion pour vous faire une opinion et trouver des arguments ; ensuite seulement, vous poursuivez votre lecture, afin de voir

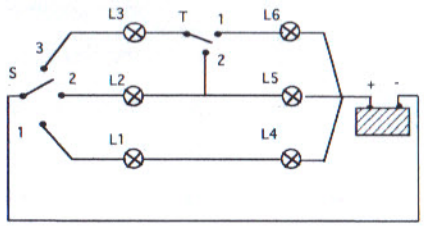
Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

quels sont les avis et les arguments, qui sont avancés lorsque la conjecture est étudiée dans un groupe.

Etude d'une première conjecture

La conjecture C_1 est-elle vraie ou fausse ?

C_1 : "Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille elle aussi"



Etude de C_1 dans un groupe

Maintenant je pose cette même question à un groupe (d'élèves, d'étudiants ou de professeurs) : j'écris au tableau cette première conjecture et, tout en restant moi-même totalement neutre, je laisse réfléchir chacun, avec éventuellement l'aide de ses voisins. Au bout de quelques minutes, j'inscris trois cases au tableau, "Vrai", "Faux", "Autre" et je demande à chacun de voter pour l'une seule de ces réponses.

Que se passe-t-il ? Eh bien, à peu près toujours la même chose ! Que le public soit constitué d'adultes ou non, de spécialistes ou non, une majorité, parfois écrasante, se dégage pour la réponse "vrai" et quelques voix se portent sur "Autre". Voici quelques-uns des arguments justifiant cette dernière réponse :

- "on ne connaît pas la position de l'interrupteur",
- "la lampe peut ne pas briller",
- "que signifie justement "briller" ? ",
- "et si les ampoules ne sont pas de même puissance, le courant peut passer sans que l'ampoule ne brille".

Une fois ces arguments avancés, certains, qui avaient pourtant voté "Vrai", renchérissent :

- "Il se peut aussi que les fils soient coupés, que la batterie ne fonctionne pas, que certaines lampes soient grillées...".

Des participants peuvent être très violemment opposés à cette argumentation, ils pensent que l'on perd son temps, qu'il n'y a aucun doute possible. Après quelques échanges, qui peuvent être parfois difficiles[1] (au moins un quart d'heure a pu se passer depuis le début de l'étude de la conjecture

[1]Voir plus loin des compléments sur ce point dans les commentaires sur l'étude des conjectures.

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

C_1), je fais procéder à un nouveau vote, et alors, c'est aussi toujours la même chose...: même si la réponse "Vrai" reste majoritaire, les indécis sont nettement plus nombreux.

(Et vous, changez-vous d'avis ?)

Objectif poursuivi dans l'étude de C_1

Quel peut bien être le but poursuivi, au travers de ce débat, que l'on n'interrompt pas - on verra plus loin la nécessité de laisser les participants s'exprimer suffisamment - et qui prend donc du temps, si précieux ? Il ne réside pas dans la réponse elle-même, mais dans la mise en évidence qu'il n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire de se mettre d'accord. Pourquoi ? Parce que les uns fonctionnent dans un modèle, un circuit normalisé suggéré par le dessin, exempt de toutes les "anomalies" avancées ci-dessus, alors que les autres sont plongés dans le concret ; parce qu'aucune des règles, régissant le fonctionnement de ce circuit et qui ont été suivies implicitement par les uns, n'a été énoncée ; parce que le flou demeure sur des mots tels que "briller", "voir briller", chacun ne leur accordant pas nécessairement le même sens.

Il s'agit donc bien ici de dégager cette notion fondamentale de **modèle** : tout débat mathématique est impossible s'il ne se situe pas dans un monde, parfaitement imaginaire, mais connu de chacun des interlocuteurs ; et même s'il s'agit d'une étude personnelle, en dehors de tout groupe, on ne peut se prononcer sur la véracité de telle ou telle phrase mathématique, que si l'on attribue exactement le même sens que l'auteur à chacun des mots de la phrase.

Pour la suite, on se met d'accord pour se situer dans le modèle suivant : "voir briller" signifie que le courant passe, les fils, les lampes et la batterie fonctionnent parfaitement, les lampes sont de même puissance. Dans ce modèle maintenant explicité, il est clair que la première conjecture est vraie.

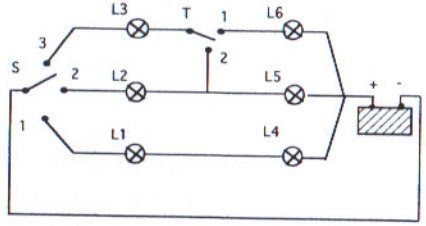
Dans la suite, pour signifier que le courant traverse la lampe n° i, nous écrirons "L_i", dont la négation sera notée "non L_i". On peut remarquer que cette dernière définition montre combien le modèle se détache du monde réel : ici toutes les nuances que l'on pouvait attribuer aux mots "voir briller" sont complètement gommées, une seule signification demeure : le courant passse ou il ne passe pas.

Etude d'une deuxième conjecture

La conjecture C_2 est-elle vraie ou fausse ?

C_2 : "Si non L_2 , alors non L_5 ."

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001



Etude de C_2 dans un groupe

L'étude de cette conjecture en groupe donne lieu à deux sortes de déroulements suivant la nature du public : s'il s'agit d'adultes scientifiques, l'unanimité se dégage rapidement pour dire que cette conjecture est fausse parce qu'il y a un contre-exemple, mais s'il s'agit de non-scientifiques ou d'élèves, le débat s'établit, les uns exhibant un contre-exemple, les autres des exemples...Il y a plus de cas où la conjecture est vraie que de cas où elle est fausse, alors..?

Elle permet donc d'institutionnaliser la convention suivante, qui est fondamentale en mathématiques, concernant toute conjecture du type "si A, alors B", dans un modèle donné :

Au sein d'un modèle :

- une conjecture est dite fausse si elle admet un contre-exemple ;

- une conjecture est dite vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse, c'est à dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple.

Mais quel est le contre-exemple ici ? S_3 et T_2 : lorsque les interrupteurs sont dans cette position, le courant ne passe pas dans la lampe n°2, mais il passe dans la lampe n°5. Cette conjecture qui présente un contre-exemple est donc fausse.

Etude d'une troisième conjecture

La conjecture C_3 est-elle vraie ou fausse ?

C_3 : "Si L_3 , alors L_2 "

Etude de C_3 dans un groupe

Voici quelques arguments qui émergent du débat, quel que soit d'ailleurs le niveau du public :

- "(L_3 implique non L_2) est vraie, donc (L_3 implique L_2) est fausse", *(ce qui est faux)*,
- "il n'a pas d'exemple, donc elle est fausse" *(ce qui est faux aussi)*...

Peut-être est-il temps de revenir à l'étude précédente, et à la règle fondamentale des mathématiques ? Qu'est-ce qu'une conjecture vraie ? Une conjecture qui n'est pas fausse, donc une conjecture qui présente la garantie absolue de n'avoir aucun contre-exemple. Quel contre-exemple peut-on donner ici ? S_2 et T_1 ? S_2 et T_2 ? Ce ne sont pas tous les deux des contre-exemples : le

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

deuxième est un "hors-sujet". L'objectif de l'étude de cette conjecture est justement de définir ces mots.

Exemple, contre-exemple, hors-sujet pour une conjecture C donnée du type "Si A, alors B"

Pour une conjecture C donnée,

*** un exemple est un cas qui vérifie l'hypothèse et la conclusion de C,**

*** un contre-exemple est un cas pour lequel l'hypothèse de C est vraie, alors que la conclusion de C est fausse,**

*** un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse de C n'est pas vérifiée.**

Ici, il n'y a que 6 cas possibles, ce sont ceux qui correspondent aux 6 combinaisons des interrupteurs. Examinons les conjectures 2 et 3.

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

Conjecture C_2:"Si non L_2 , alors non L_5".

Pour la conjecture C_2	l'hypothèse est "non L_2"	la conclusion est "non L_5"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_1 et T_2	vraie	vraie	exemple
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet
S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_3 et T_2	vraie	fausse	contre-exemple

Conjecture C_3 : "Si L_3 , alors L_2".

Pour la conjecture C_3	l'hypothèse est "L_3"	la conclusion est "L_2"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	fausse		hors-sujet
S_1 et T_2	fausse		hors-sujet
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet
S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	vraie	fausse	contre-exemple
S_3 et T_2	vraie	fausse	contre-exemple

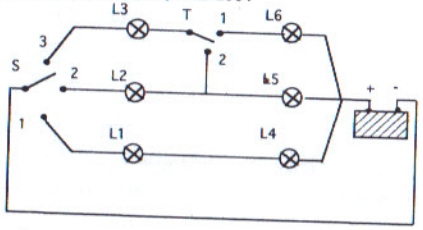
Ainsi, ces conjectures sont bien fausses puisqu'elles admettent au moins un contre-exemple : c'est l'argument qui est à donner ici. La présence ou l'absence d'exemples n'a rien à voir avec le fait qu'une conjecture soit vraie ou fausse.

Etude d'une quatrième conjecture

La conjecture C_4 est-elle vraie ou fausse ?

C_4 : "Si L_1 et L_3 , alors L_2 et non L_5"

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001



Etude de C_4 dans un groupe

Que se passe-t-il ? Encore une fois, à peu près toujours la même chose : la discussion est très animée. Certains, qui examinent les six cas possibles et ne trouvent aucun contre-exemple, appliquent la règle du jeu mathématique, d'autres leur opposent que c'est complètement absurde, donc c'est forcément faux. L'étude de cette conjecture constitue réellement un obstacle : il n'est pas aussi simple qu'on aurait pu le croire au premier abord de comprendre le principe de contradiction que nous avons vu lors de l'étude de la deuxième conjecture, et, pour certains, c'est maintenant que se joue l'acquisition de cette connaissance fondamentale. Je ne brusque pas les choses et laisse suffisamment de temps à chacun pour qu'il se rende compte de la contradiction entre "c'est faux parce que c'est absurde" (on ne peut pas jamais avoir L_1 et L_3 en même temps) et "c'est vrai parce qu'il n'y a pas de contre-exemple". Mais notons que la connaissance ne s'acquiert souvent qu'après un parcours sinueux passant par des moments de compréhension et d'autres de non-compréhension et que ce qui se passe lors de l'étude de cette conjecture relève de ce processus.

Mais concluons ici après avoir examiné le tableau ci-dessous.

Pour la conjecture C_4	l'hypothèse est "L_1 et L_3"	la conclusion est "L_2 et non L_5"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1et T_1	fausse		hors-sujet
S_1et T_2	fausse		hors-sujet
S_2et T_1	fausse		hors-sujet
S_2et T_2	fausse		hors-sujet
S_3et T_1	fausse		hors-sujet
S_3et T_2	fausse		hors-sujet

La conjecture C_4 n'admet aucun contre-exemple, donc elle ne peut être que vraie. Cependant on note qu'il n'existe que des hors-sujet pour cette conjecture, elle ne peut être illustrée par aucun exemple : elle ne présente aucun intérêt, elle est complètement vide, mais elle est vraie.

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

Commentaires sur l'étude de ces quatre conjectures et exploitation

1 - Nous accordons une grande importance à l'étude de cette quatrième conjecture, destinée à établir l'existence d'un écart considérable entre le fonctionnement du monde habituel, concret ou abstrait d'ailleurs, qui nous entoure et celui des mathématiques.

En effet, dans le monde quotidien, est considéré comme vrai ce qui est vrai dans beaucoup de cas, et ce n'est pas un cas malheureux, où cela ne marche pas, qui fait basculer les opinions. L'exception qui confirme la règle est un adage fondamentalement faux en mathématiques, comme le montre l'étude de la conjecture C_2 : un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une conjecture est fausse. L'a-t-on dit un jour à nos élèves ? Leur a-t-on fait comprendre que pour faire des mathématiques, il faut passer d'un monde de couleurs et de subtilités à un monde peint en noir et blanc ? Insistons : il n'y pas de nuances dans la vérité mathématique, pas de conjecture qui soit, dans un modèle donné, un peu fausse ou un peu vraie, ou encore presque vraie ou encore "vraie dans certains cas", comme le disent parfois certains élèves. Dans nos classes, nous ne rencontrons que des conjectures qui n'ont que deux valeurs de vérité très nettes : "Vrai" ou "Faux" (nous excluons ici les conjectures indécidables[2] qui ne nous concernent pas au collège ou au lycée). Bien sûr, il n'est pas toujours évident de connaître cette valeur de vérité, c'est pourquoi nous avons la possibilité de voter "Autre".

Toute cette activité "circuit" a justement pour but de montrer qu'il faut être conscient de cette rupture, entre la vérité du quotidien et celle des mathématiques : tant que l'on n'a pas compris que faire des mathématiques, c'est se plonger dans un modèle, c'est à dire un monde complètement simplifié, en dehors de toute réalité, et que ce modèle est régi par un principe de contradiction fondamental, on ne peut que tenter d'imiter un certain discours, dans un champ nécessairement limité, sans rien comprendre en profondeur. Et cette convention des mathématiques, celle que l'on fait émerger de l'étude de la deuxième conjecture, est incontournable : son non-respect fait sortir immédiatement du monde mathématique, aucun compromis n'est possible. Là encore, la différence est grande avec le monde habituel.

Pour montrer cette rupture, nous choisissons de provoquer un conflit. Celui-ci sera d'autant plus violent et, par suite, porteur de fruits, qu'il est vécu dans un groupe de personnes suffisamment nombreux. Aussi consacrons-nous du temps à l'étude de la première conjecture, même s'il faut lutter (et inéluctablement la résistance est forte) contre une majorité : notre véritable objectif, au travers de l'étude de cette conjecture, est en fait l'installation de ce malaise, qui permet ensuite d'expliquer que l'on ne peut faire des mathématiques que si l'on se plonge dans un modèle.

Il peut arriver que, lors de l'étude de cette première conjecture, tous les participants soient d'accord pour dire qu'elle est vraie et qu'il n'y ait pas du tout de conflit au départ. Cela ne sert absolument pas notre objectif. Nous avons alors confectionné un "véritable circuit" en montant en

---

[2] On dit qu'une conjecture est indécidable si le fait de la déclarer vraie, tout comme celui de la considérer fausse, ne conduit à aucune contradiction.

série deux ampoules, l'une du phare-avant, l'autre du phare-arrière d'une bicyclette : lorsque l'on relie les deux ampoules à une pile de 4,5 V, le courant les traverse effectivement, mais l'une "ne brille pas" ; elles sont en effet de puissances différentes. L'utilisation de ce circuit permet d'instaurer le doute et de poser le problème du modèle.

2 - Pourquoi un circuit ? Certaines personnes sont très réticentes face aux mathématiques : souvent celles qui n'ont pas eu conscience du pas à franchir entre le réel et les mathématiques et qui voient ce dernier de très loin. Aussi avons-nous choisi, pour qu'elles puissent s'en rapprocher, de les y attirer par des activités apparemment non mathématiques, comme semble l'être l'activité "circuit".

C'est assez tôt dans l'année scolaire que nous introduisons cette activité en classe. Auparavant nous créons des occasions où se pose la question de vrai et du faux. Et au moment d'aborder "circuit", nous en présentons l'objectif qui est justement de clarifier ce que l'on appelle vrai et ce que l'on appelle faux en mathématiques.

Lors de l'étude de la deuxième conjecture nous faisons le point sur les notions d'exemple, de contre-exemple, de hors-sujet pour une conjecture donnée, ainsi que la convention fondamentale du vrai et du faux du mathématicien.

Une pause est alors bénéfique à ce moment lorsque l'on pratique cette activité avec des élèves de lycée. Nous arrêtons là en général l'activité "circuit" pour quelques semaines, au cours desquelles nous ne manquons aucune occasion de faire fonctionner le principe de contradiction dans le monde mathématique de la classe. Dans une classe de seconde, nous nous contentons d'ailleurs de l'étude de ces deux premières conjectures pour une bonne partie de l'année, et ce n'est qu'au milieu de l'année scolaire que nous poursuivons l'activité par l'étude d'autres conjectures, que l'on verra dans les pages suivantes, qui concernent les notions de réciproque et de contraposée.

En collège, il nous semble tout aussi important que ces points de modèle et de contre-exemple soient abordés très tôt : le circuit électrique peut alors être remplacé par un circuit de bus (voir en annexe de ce chapitre). Les autres notions peuvent être abordées un peu plus tard, à partir de la classe de quatrième.

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

En résumé :

Premières notions abordées pour entrer dans le jeu des mathématiques :	**Dans l'activité "circuit" précédente :**
Notion de modèle	Etude de la conjecture C_1
Définition d'un exemple, d'un contre-exemple, d'un hors-sujet, pour une conjecture donnée	Etude de la conjecture C_2, qui permet d'illustrer chacune des définitions.
Convention fondamentale des mathématiques : **au sein d'un modèle, une conjecture est dite fausse si elle admet un contre-exemple ; une conjecture est dite vraie si l'on démontre qu'il ne peut en exister aucun contre-exemple.**	Etude de la conjecture C_2, qui permet d'énoncer ce principe, puis des conjectures C_3 et C_4, qui permettent d'asseoir véritablement cette convention.

Quelques exemples au collège ou en seconde

Après l'activité précédente, on peut demander aux élèves de résoudre quelques conjectures très simples (ils doivent dire si elles sont vraies ou fausses et le prouver) du type suivant.

Conjecture 1 : "quels que soient les nombres a et b (réels, à partir de la classe de seconde), si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$."

Conjecture 2 : "tout nombre réel est inférieur à son carré."

Conjecture 3 : "quels que soient les nombres a et b différents de 0 (réels, à partir de la classe de seconde), si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ "

Conjecture 4 : "quels que soient deux nombres entiers impairs consécutifs, leur somme est multiple de 4."

L'étude de ces conjectures permet un travail en profondeur sur le raisonnement et sur les nombres. On aborde aussi les problèmes de langage en demandant une reformulation des conjectures 2 et 4 sous la forme "si , alors..." avant leur étude. Elle peuvent être la base du cours, si on en débat en classe. Les trois premières font encore fonctionner la règle du contre-exemple, mais la dernière demande le passage à une démonstration, utilisant par exemple l'écriture algébrique, pour convaincre qu'il n'existe pas de contre-exemple.

Conjecture 5 : "quels que soient les triangles OAB et OA'B' tels que O, A, A' d'une part et O, B, B' d'autre part, soient alignés, si $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, alors (AB) et (A'B') sont parallèles."

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

Elle permet non seulement de faire fonctionner la règle du contre-exemple, mais aussi de montrer l'importance de l'ordre des points dans l'énoncé de la "réciproque" du théorème de Thalès : cette fameuse petite phrase dont aucun élève ne se soucie, soit qu'il l'apprenne par cœur sans comprendre, soit qu'il n'apprenne rien du tout.

Plus particulièrement en seconde, on peut demander l'étude des conjectures suivantes.

Conjecture 6: "quels que soient les points A, B, A', B' et le réel x, si $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{A'B'}$, alors $AB = x\,A'B'$ "

Ici encore fonctionne le principe de contradiction, on étudie aussi un des aspects de la différence entre vecteur et longueur et l'utilisation de la lettre x qui ne désigne pas nécessairement un nombre positif.

Dans tous les cas, la recherche de contre-exemple est une activité riche : elle permet de manipuler les concepts fondamentaux et peut déboucher, soit sur la rédaction d'une démonstration élaborée dans le cas où la conjecture est vraie, soit sur l'énoncé d'une autre conjecture dont on a modifié l'énoncé au vu des contre-exemples trouvés pour la précédente. On peut finir par aboutir ainsi à un théorème.

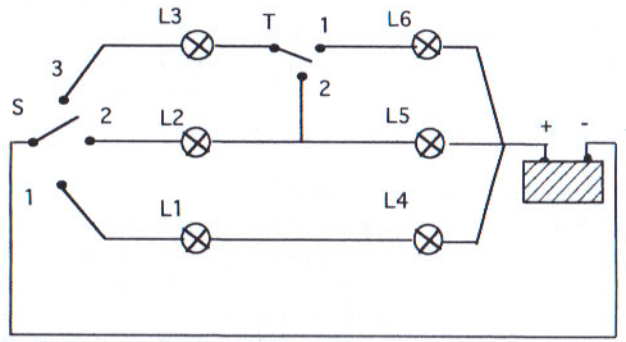
Faire des mathématiques, c'est bien le but que nous poursuivons pour chacun de nos élèves. Ce que nous venons de voir de l'activité "circuit" n'est qu'un moyen de les faire entrer dans un mode de pensée qui leur permette d'avancer vers cet objectif, chacun à son niveau. Le travail est à poursuivre sans cesse dans le même esprit. Mais quel que soit le niveau, il n'y a pas besoin de chercher des conjectures très compliquées, bien au contraire. Mais en donner à débattre en classe, en y passant du temps, permet de voir certaines notions fondamentales sous des aspects différents et de travailler sur les définitions. Et ceci est accessible à tous les élèves, même faibles. Nous avons choisi de leur permettre, à eux aussi, de faire réellement des mathématiques, sans les considérer comme devant bénéficier sans cesse d'une aide particulière. La possibilité qui est offerte à toute la classe de voter "Autre" est justement destinée à n'écarter aucun élève, en reconnaissant à chacun le droit de "ne pas savoir". Mais nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

Contraposée et réciproque : retour au circuit

Après cette première partie de l'activité "circuit" décrite ci-dessus, il nous semble important d'aborder la notion de réciproque assez tôt au collège (cinquième ou quatrième), celle de contraposée pouvant être remise à la classe de troisième ou de seconde, encore qu'elle s'avère indispensable si l'on veut justifier simplement le raisonnement qui consiste à démontrer qu'un certain triangle n'est pas rectangle, ou que certaines droites ne sont pas parallèles.

Nous choisissons habituellement d'aborder ces notions en utilisant à nouveau l'activité "circuit" au travers de l'étude des conjectures suivantes, dans le même modèle de circuit normalisé que celui qui a été décrit à la fin de l'étude de la conjecture C_1.



Implication directe et réciproque

On peut reprendre l'étude de la conjecture C_2: "si non L_2 , alors non L_5 " *(S_3 et T_2 est un contre-exemple pour cette conjecture : elle est donc fausse.).*

Puis passer à l'étude de la **conjecture C_5 : "si non L_5 , alors non L_2 "**

Il est intéressant de construire le tableau renfermant les six cas possibles.

Pour la conjecture C_5	l'hypothèse est "non L_5"	la conclusion est "non L_2"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_1 et T_2	vraie	vraie	exemple
S_2 et T_1	fausse		hors-sujet

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

S_2 et T_2	fausse		hors-sujet
S_3 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_3 et T_2	fausse		hors-sujet

Cette conjecture C_5 n'admettant aucun contre-exemple est donc vraie.

Notons que les valeurs de vérité (c'est à dire qu'elles soient vraies ou fausses) d'une implication (I) telle que A ⇒ B et de sa réciproque (R) telle que B ⇒ A sont complètement indépendantes l'une de l'autre : en effet, si (I) admet un contre-exemple, c'est un cas où A est vraie et B est fausse, c'est donc un hors-sujet pour la réciproque (R), puisque son hypothèse B est fausse.

Implication et contraposée

Conjecture C_6 : "si L_2, alors L_5 "

Pour la conjecture C_6	l'hypothèse est "L_2"	la conclusion est "L_5"	
Cas	hypothèse H	conclusion C	Ce cas est un
S_1 et T_1	fausse		hors-sujet
S_1 et T_2	fausse		hors-sujet
S_2 et T_1	vraie	vraie	exemple
S_2 et T_2	vraie	vraie	exemple
S_3 et T_1	fausse		hors-sujet
S_3 et T_2	fausse		hors-sujet

Etant donnée une conjecture écrite sous la forme, "si A, alors B" , que l'on appelle (D) (implication directe), sa réciproque est, comme nous l'avons vu, "si B, alors A" , et elle n'est pas à confondre avec sa contraposée "si (non B) , alors (non A) ", que l'on désigne par (C).

Pour la contraposée (C) , un contre-exemple est un cas où (non B) est vrai et (non A) faux, autrement dit, un cas où B est faux et A vrai, c'est donc aussi un contre-exemple pour l'implication directe (D). Réciproquement un contre-exemple pour (D) est aussi un contre-exemple pour (C) . (C) et (D) ont donc les mêmes contre-exemples, ce qui permet d'affirmer qu'une implication directe et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Cependant, même si elles sont logiquement équivalentes, elles sont formellement très différentes et elles ne disent pas la même chose ; en effet, un exemple pour (D) est un cas où A et B sont vrais, autrement dit, un cas où (non A) et (non B) sont faux, c'est donc un hors-sujet pour la contraposée. Débattre de cette conjecture 6 permet justement d'expliciter cette idée importante, qui permet de déboucher sur le principe démonstratif suivant : si on n'a pas d'idée pour démontrer qu'une conjecture est vraie, le passage à sa contraposée peut permettre de débloquer la situation.

Par exemple, lorsqu'il s'agit de démontrer la conjecture (E_1) suivante :

"si le carré d'un entier naturel est impair, alors cet entier est impair".

Extrait de « Le vrai et le faux au collège et au lycée », Michèle GANDIT, Marie-Claire DEMONGEOT, IREM de Grenoble, réed 2001

Sa contraposée est (E_2) : " si un entier naturel est pair, alors son carré est pair". L'idée évoquée par cette contraposée est différente de celle que l'on a à la lecture de (E_1), bien qu'elles soient toutes les deux logiquement équivalentes. La démonstration de (E_2) est immédiate, et elle prouve aussi (E_1).