

Tout est sous contrôle

Les mathématiques optimisent le quotidien

Emmanuel Trélat

Univ. Pierre et Marie Curie (Paris 6), Labo. J.-L. Lions

Maths Club, Halle aux Farines, 5 février 2018



A quoi s'applique la théorie du contrôle ?

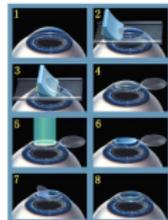
Mécanique

Automobile (guidage, amortisseurs, ABS, ESP assistance à la conduite),
aéronautique (navette, satellites), robotique



Biologie, médecine

Système proie-prédateurs, bioréacteur, contrôle d'épidémies,
secteur médical (pacemakers, opérations au laser)



Electricité, électronique

Circuit RLC, thermostats, régulation, frigorifiques, ordinateurs, internet
et les communications en général, photographie et vidéo numérique



Economie

Optimisation de gains, contrôle des flux boursiers,
Prévisions de marchés



Code	Changement	Différence							
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
101	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
102	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
103	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
104	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
105	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
106	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
107	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
108	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
109	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
110	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
111	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
112	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
113	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
114	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
115	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
116	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
117	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
118	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
119	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
120	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
121	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
122	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
123	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
124	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
125	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
126	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
127	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
128	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
129	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
130	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
131	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
132	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
133	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
134	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
135	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
136	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
137	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
138	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
139	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
140	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
141	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
142	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
143	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
144	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
145	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
146	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
147	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
148	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
149	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
150	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
151	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
152	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
153	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
154	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
155	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
156	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
157	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
158	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
159	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
160	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
161	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
162	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
163	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
164	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
165	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
166	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
167	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
168	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
169	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
170	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
171	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
172	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
173	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
174	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
175	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
176	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
177	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
178	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
179	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
180	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
181	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
182	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
183	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
184	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
185	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
186	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
187	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
188	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
189	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
190	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
191	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
192	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
193	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
194	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
195	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
196	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
197	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
198	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
199	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Chimie

Cinétique chimique, génie des procédés, raffinage pétrolier, distillation, pétrochimie





A quoi s'applique la théorie du contrôle ?

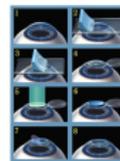
Mécanique

Automobile (guidage, amortisseurs, ABS, ESP assistance à la conduite),
aéronautique (navette, satellites), robotique



Biologie, médecine

Système proie-prédateurs, bioréacteur, contrôle d'épidémies,
secteur médical (peacemakers, opérations au laser)



Electricité, électronique

Circuit RLC, thermostats, régulation, frigorifiques, ordinateurs, internet
et les communications en général, photographie et vidéo numérique



Chimie

Cinétique chimique, génie des procédés, raffinage pétrolier, distillation, pétrochimie



Economie

Optimisation de gains, contrôle des flux boursiers,
Prévisions de marchés



Exemples de débouchés

- **Industriels** : Airbus, Areva, CNES, Dassault, EDF, IFP, Michelin, Microsoft, PSA, Renault, RTE, Thalès, Total... **thèses (CIFRE), ingénieurs**
- **Universitaires** : toutes universités (France, étranger), grands organismes de recherches : CEA, Inria, INRA, IFSTTAR, ONERA, ... **thèses académiques**

Modèle mathématique (théorie du contrôle)

Dynamique d'évolution (EDO ou EDP)

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t))$$

Critère d'optimisation

$$\min_{\substack{x(0)=x_0 \\ x(t_f)=x_1}} C(u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt$$

(généralisation du calcul des variations)

Mathématiques utilisées

Modélisation, théorie du contrôle, analyse de systèmes, équations d'évolution (EDO, EDP), géométrie différentielle, optimisation, calcul scientifique, algèbre linéaire, ...

Qu'est-ce que la théorie du contrôle ?

Les questions principales :

Contrôlabilité

Amener un système d'un état initial vers un certain état final.

Contrôle optimal

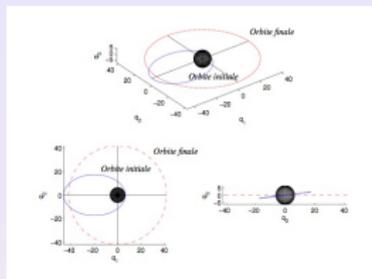
On cherche de plus à **optimiser** un certain critère.

Stabilisation

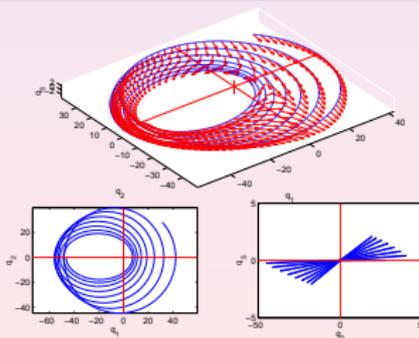
Une trajectoire étant planifiée, on cherche à la **stabiliser** de manière à la rendre robuste, insensible aux perturbations.

Observabilité

Reconstruire l'état complet du système à partir d'informations partielles.



Est-il possible de mener le système considéré d'un point initial donné vers un point final visé ?



Est-il possible de mener le système considéré d'un point initial donné vers un point final visé ?

C'est le problème de **contrôlabilité**.

Exemple 1 : garer sa voiture en faisant un créneau

- le créneau parfait
- difficulté : contraintes de roues
- un exemple de créneau

Exemple 2 : voiture avec remorques

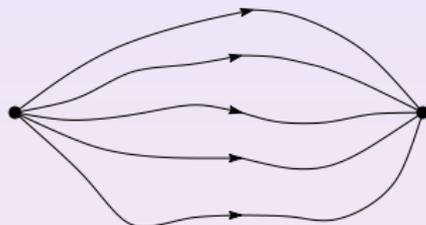
- reculer une caravane
- deux remorques

Exemple 3 : roulement de pommes

Théorèmes de contrôlabilité :
Kalman, Chow-Hörmander...

Optimisation de trajectoire

- minimiser un temps de transfert
- minimiser une consommation
- maximiser un rendement
- ...



Exemple : créneau en temps minimal

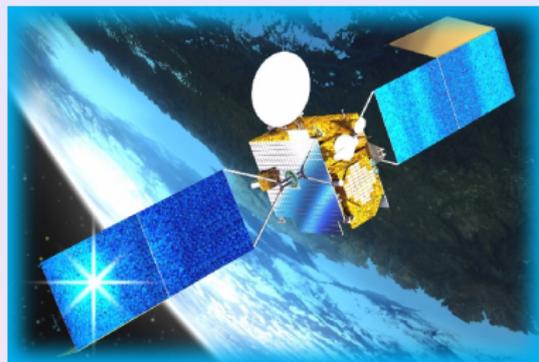
Le problème de transfert orbital à poussée faible

Equation de Kepler contrôlée

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}$$

$q \in \mathbb{R}^3$: position, $r = |q|$, F : poussée, m masse :

$$\dot{m} = -\beta|F|$$



Contrainte de poussée maximale

$$|F| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leq F_{\max} \simeq 0.1N$$

Transfert d'orbite :

D'une orbite initiale excentrique et inclinée vers une orbite *géostationnaire*.

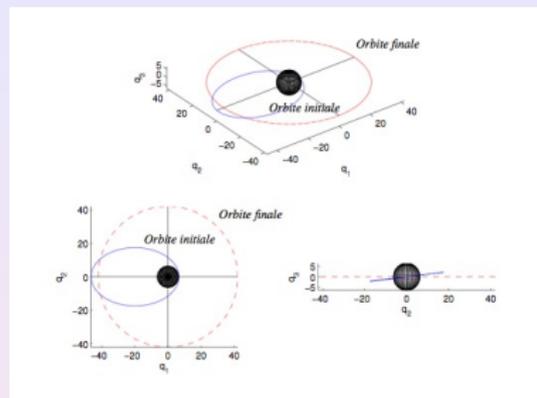
Le problème de transfert orbital à poussée faible

Equation de Kepler contrôlée

$$\ddot{q} = -q \frac{\mu}{r^3} + \frac{F}{m}$$

$q \in \mathbb{R}^3$: position, $r = |q|$, F : poussée, m masse :

$$\dot{m} = -\beta|F|$$



Contrainte de poussée maximale

$$|F| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \leq F_{\max} \simeq 0.1N$$

Transfert d'orbite :

D'une orbite initiale excentrique et inclinée vers une orbite *géostationnaire*.

Contrôlabilité : étudiée dans



B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5, 4 (2005), 929–956.



B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*, Math. & Appl. 51, Springer Verlag (2006), XIV, 276 pages.

Modélisation sous forme d'un problème de contrôle optimal

Etat : $x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$

Contrôle : $u(t) = F(t)$

Problème de contrôle optimal

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbf{R}^m,$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1,$$

$$\min C(T, u), \quad \text{où } C(T, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$



Système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

Coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$

Problème de contrôle optimal

Déterminer les trajectoires $x(\cdot)$ solutions de (1), telles que $x(0) \in M_0$, $x(T) \in M_1$, et minimisant le coût $C(T, u)$.



Méthodes numériques

- 1 méthodes directes
- 2 méthodes indirectes

- **Discrétisation totale** : état et contrôle sont discrétisés
⇒ problème d'optimisation non linéaire en dimension finie

$$\begin{aligned} \min & F(Z), \\ & g(Z)=0 \\ & h(Z)\leq 0 \end{aligned}$$

où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$.

- **Résolution numérique** : méthodes de gradient, pénalisation, SQP, duales, etc.
→ par exemple : AMPL combiné avec IpOpt

- Résolution numérique de l'équation de **Hamilton-Jacobi** :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_1(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0,$$

où $H_1(x, p) = \max_{u \in \Omega} \langle p, f(x, u) \rangle - f^0(x, u)$.

- **Résolution numérique** : méthodes explicites, front d'onde, fast-marching, ...

- **Méthodes de moments**... (relaxation du contrôle sur des espaces de mesures)

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$


$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

(au moins localement, par exemple sous la condition
de Legendre stricte : $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x, p, u)$ définie négative)

Méthodes indirectes

→ Emploi préalable du Principe du Maximum de Pontryagin
(multiplicateurs de Lagrange, ou KKT, en dim infinie)

$$H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u).$$

Principe du maximum de Pontryagin

Toute minimisante $x(\cdot)$ est la projection d'une *extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, p, p^0, u) = \max_{v \in \Omega} H(x, p, p^0, v).$$


 $u(t) = u(x(t), p(t))$

(au moins localement, par exemple sous la condition
de Legendre stricte : $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x, p, u)$ définie négative)

Méthode de tir :

Les **extrémales** (x, p) sont solutions de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p), \quad x(0) = x_0, \quad (x(T) = x_1),$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p), \quad p(0) = p_0,$$

où le contrôle optimal maximise le Hamiltonien.

Application exponentielle

$$\exp_{x_0}(t, p_0) = x(t, x_0, p_0),$$

(flot extrémal)

→ **Méthode de tir** : déterminer p_0 t.q. $\exp_{x_0}(t, p_0) = x_1$ (Newton)

Remarque

- PMP = condition d'optimalité du **premier ordre**.
- Conditions nécessaires / suffisantes (locales) du second ordre : **points conjugués**.
→ tester si $\exp_{x_0}(t, \cdot)$ est une immersion en p_0 .

Problème de contrôle optimal



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc.



Dualisation

Kuhn-Tucker,
puis méthode de Newton

méthodes directes

Dualisation

Principe du maximum



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc,
puis Newton (méthode de tir)

méthodes indirectes

Problème de contrôle optimal



Discrétisation

Euler, Runge-Kutta, etc.



Dualisation

Kuhn-Tucker,
puis méthode de Newton

méthodes directes

Dualisation

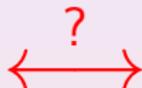
Principe du maximum



Discrétisation

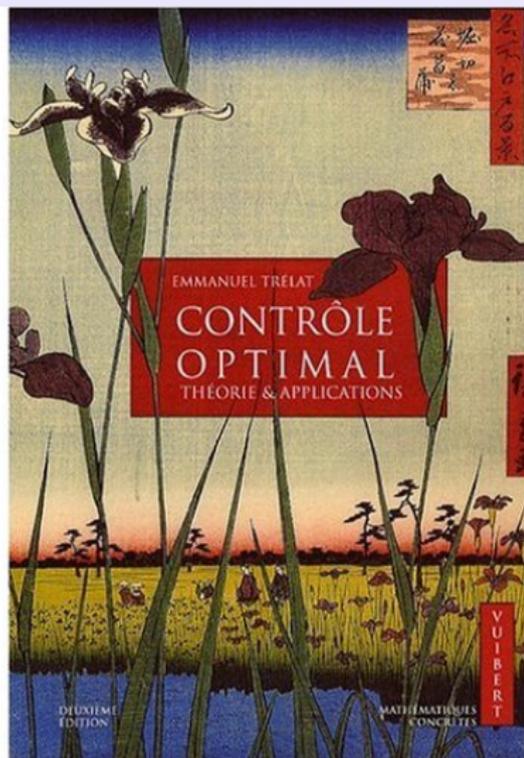
Euler, Runge-Kutta, etc,
puis Newton (méthode de tir)

méthodes indirectes



Pas de commutation en général.

Commutation pour les méthodes de Runge-Kutta à coefficients > 0 (cf Hager, 2000)



E. Trélat,
Contrôle optimal : théorie & applications,
Vuibert.

(version électronique en ligne)

Dans les problèmes d'aérospatiale, on privilégie souvent les méthodes de tir car elles sont beaucoup plus précises numériquement.

MAIS : difficiles à faire converger... (méthode de Newton)

Problème

Comment faire converger la méthode de tir ?

Le PMP doit être combiné avec d'autres techniques :

- application préalable d'une méthode directe
- outils géométriques \Rightarrow **contrôle optimal géométrique**
- méthodes de **continuation** ou **homotopie**
- théorie des **systèmes dynamiques**



E. Trélat, *Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges*,
J. Optim. Theory Appl. (2012).

Transfert orbital, temps minimal

Principe du maximum \Rightarrow les **extrémales** (x, p) sont solutions de

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(0) = p_0,$$

avec un contrôle optimal qui **sature la contrainte** : $\|u(t)\| = F_{max}$.

\rightarrow **Méthode de tir** : déterminer p_0 t.q. $x(T) = x_1$,

couplée à une **homotopie** sur $F_{max} \mapsto p_0(F_{max})$

Heuristique sur t_f :

$$t_f(F_{max}) \cdot F_{max} \simeq \text{cste.}$$

(les trajectoires optimales sont des "droites",
Bonnard-Caillau 2009))

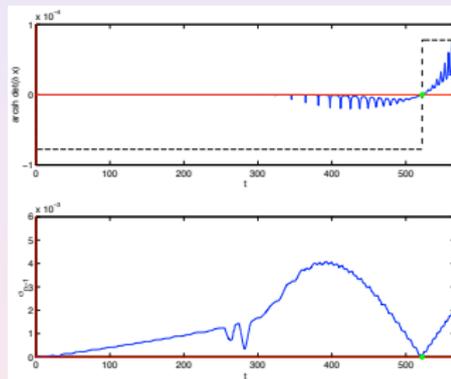
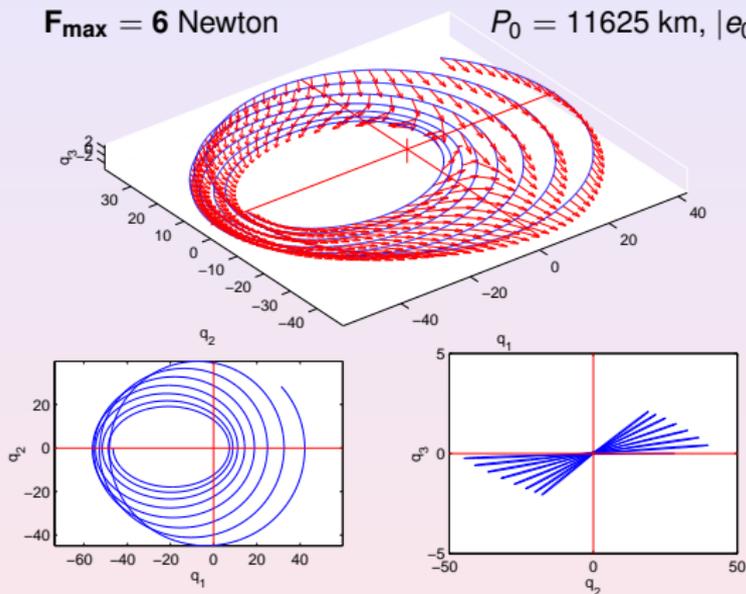
F_{max}	t_f	Exécution	F_{max}	t_f	Exécution
60	14.800	1	1.4	606.13	33
24	34.716	5	1	853.31	44
12	70.249	3	0.7	1214.5	64
9	93.272	7	0.5	1699.4	234
6	141.22	6	0.3	2870.2	223
3	285.77	22	0.2	4265.7	226
2	425.61	22			

(Caillau, Gergaud, Haberkorn, Martinon, Noailles, ...)

Transfert orbital, temps minimal

$F_{\max} = 6$ Newton

$P_0 = 11625$ km, $|e_0| = 0.75$, $i_0 = 7^\circ$, $P_f = 42165$ km



Temps minimal : 141.6 heures ($\simeq 6$ jours). Premier temps conjugué : 522.07 heures.

Outil principal utilisé : méthode de continuation (ou homotopie)
→ continuité de la solution optimale par rapport au paramètre λ

Contexte théorique (analyse de sensibilité) :

$$\exp_{x_0, \lambda}(T, p_0(\lambda)) = x_1$$

La faisabilité **locale** est assurée :
en l'absence de points conjugués



Test numérique de champs de Jacobi

La faisabilité **globale** est assurée :
en l'absence de minimiseurs anormaux



vrai pour des systèmes *génériques*
comportant plus de 3 contrôles
(Chitour-Jean-Trélat, J. Differential Geom., 2006)



Travaux récents avec Airbus D&S (anciennement EADS Astrium – les Mureaux)

Transfert à consommation minimale sur les lanceurs **Ariane 5** et futurs **Ariane 6** (troisième phase atmosphérique, poussée forte)

Objectif : logiciel automatique et instantané.

- continuation sur la courbure de la Terre (terre plate → terre ronde)



M. Cerf, T. Haberkorn, E. Trélat, *Continuation from a flat to a round Earth model in the coplanar orbit transfer problem*, *Optimal Appl. Cont. Methods* (2012).

- contraintes d'éclipses → **contraintes sur l'état**, systèmes hybrides



T. Haberkorn, E. Trélat, *Convergence results for smooth regularizations of hybrid nonlinear optimal control problems*, *SIAM J. Control Optim.* (2011).

Un challenge (urgent !!)

Collecte des débris spatiaux :

- 22000 débris de plus de 10 cm (catalogués)
- 500000 débris entre 1 et 10 cm (non catalogués)
- des millions de débris plus petits



En orbite basse

→ problèmes mathématiques difficiles combinant contrôle optimal, optimisation continue / discrète / combinatoire
(thèse de Max Cerf, 2012)



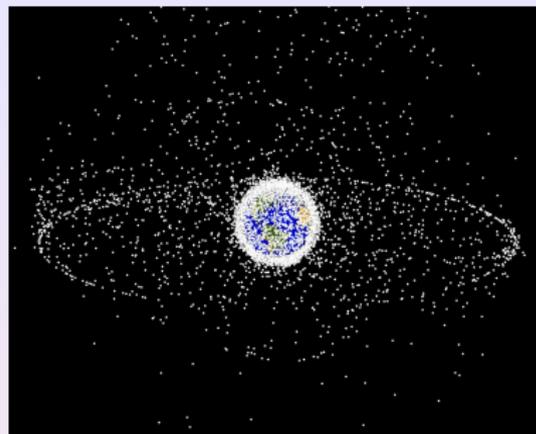
M. Cerf, *Multiple space debris collecting mission - Debris selection and trajectory optimization*, J. Optim. Theory Appl. (2013).

Etudes actuelles, Airbus, CNES, NASA

Un challenge (urgent !!)

Collecte des débris spatiaux :

- 22000 débris de plus de 10 cm (catalogués)
- 500000 débris entre 1 et 10 cm (non catalogués)
- des millions de débris plus petits



Autour de l'orbite géostationnaire

→ problèmes mathématiques difficiles combinant contrôle optimal, optimisation continue / discrète / combinatoire
(thèse de Max Cerf, 2012)



M. Cerf, *Multiple space debris collecting mission - Debris selection and trajectory optimization*, J. Optim. Theory Appl. (2013).



Etudes actuelles, Airbus, CNES, NASA



Un challenge (urgent !!)

Collecte des débris spatiaux :

- 22000 débris de plus de 10 cm (catalogués)
- 500000 débris entre 1 et 10 cm (non catalogués)
- des millions de débris plus petits



Les éboueurs de l'espace

→ problèmes mathématiques difficiles combinant contrôle optimal, optimisation continue / discrète / combinatoire
(thèse de Max Cerf, 2012)



M. Cerf, *Multiple space debris collecting mission - Debris selection and trajectory optimization*, J. Optim. Theory Appl. (2013).

Etudes actuelles, Airbus, CNES, NASA

Une trajectoire étant planifiée, on cherche à la stabiliser de manière à la rendre robuste, insensible aux perturbations.

Exemple

Stabiliser un pendule inversé



Robot $2k\pi$
(Ecole des Mines)
Bertrand

Le problème circulaire restreint des 3 corps

Dynamique d'un corps de masse négligeable dans le champ gravitationnel de 2 masses m_1 et m_2 (primaires) ayant des orbites circulaires :

Equations du mouvement (repère tournant)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

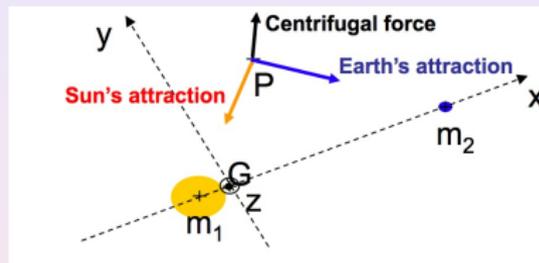
avec

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},$$

et

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}.$$



Des références

Equipe américaine :

Koon, Lo, Marsden, Ross...

Equipe espagnole :

Gomez, Jorba, Llibre, Masdemont, Simo...

Points de Lagrange

Intégrale première de Jacobi $J = 2\Phi - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

→ variété d'énergie de dimension 5

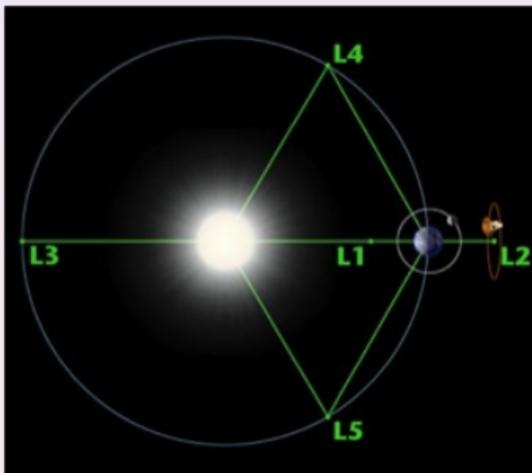
La dynamique a 5 points d'équilibre :

- 3 points colinéaires : L_1, L_2, L_3 (instables) ;
- 2 points équilatéraux : L_4, L_5 (stables).

(Euler)

(Lagrange)

(Szebehely 1967)



Extension d'un théorème de Lyapunov (Moser) \Rightarrow même comportement que le système linéarisé autour des points de Lagrange

Points de Lagrange

Intégrale première de Jacobi $J = 2\Phi - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

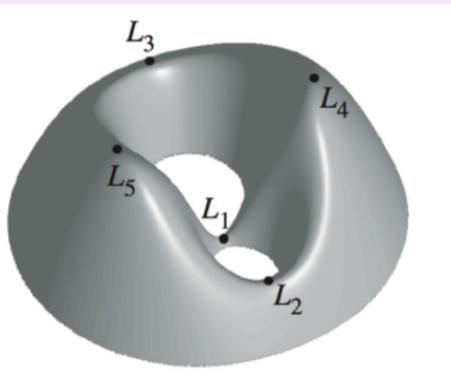
→ variété d'énergie de dimension 5

La dynamique a 5 points d'équilibre :

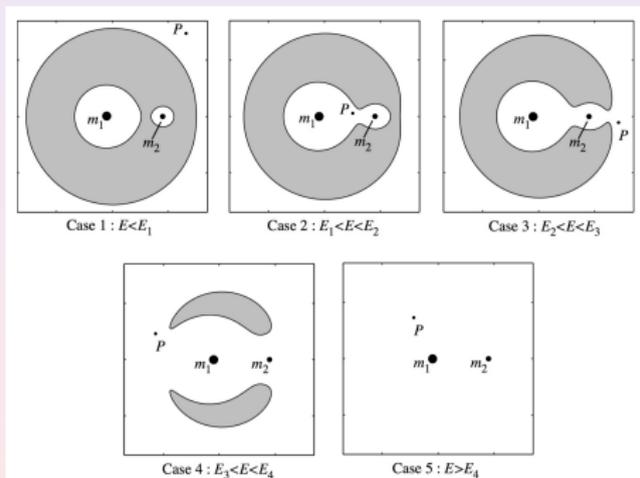
- 3 points colinéaires : L_1, L_2, L_3 (instables) ;
- 2 points équilatéraux : L_4, L_5 (stables).

(Szebehely 1967)

(Euler)
(Lagrange)



région de Hill

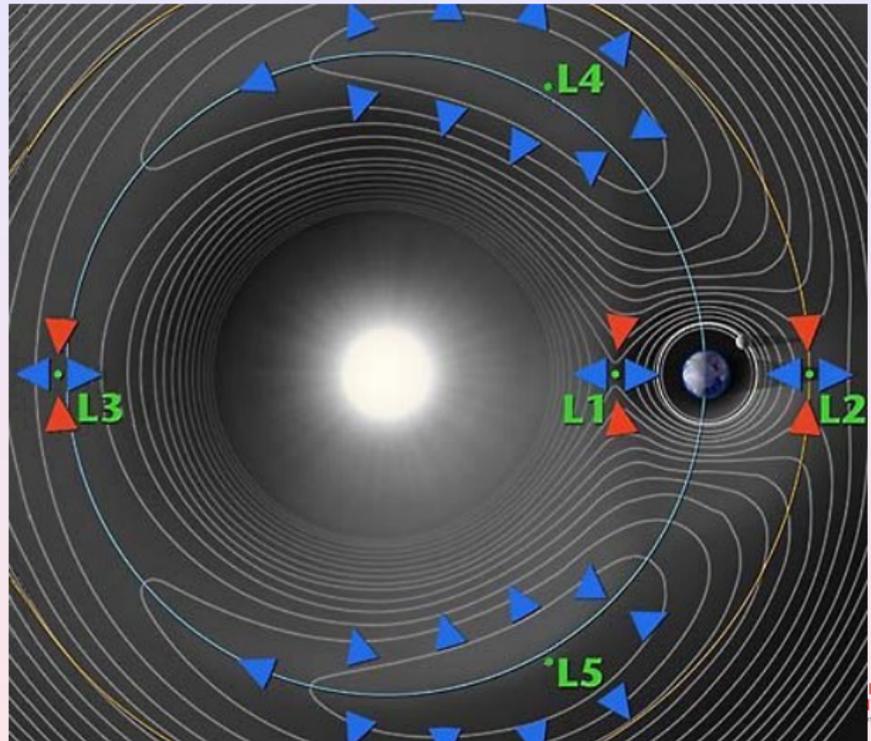


Extension d'un théorème de Lyapunov (Moser) \Rightarrow même comportement que le système linéarisé autour des points de Lagrange

Points de Lagrange dans le système Terre-Soleil

D'après un th. de Moser :

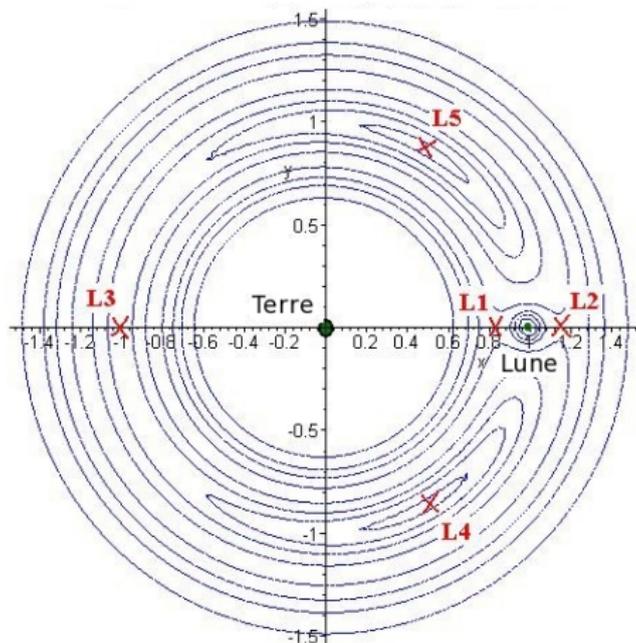
- L_1, L_2, L_3 : instables.
- L_4, L_5 : stables.



Points de Lagrange dans le système Terre-Lune

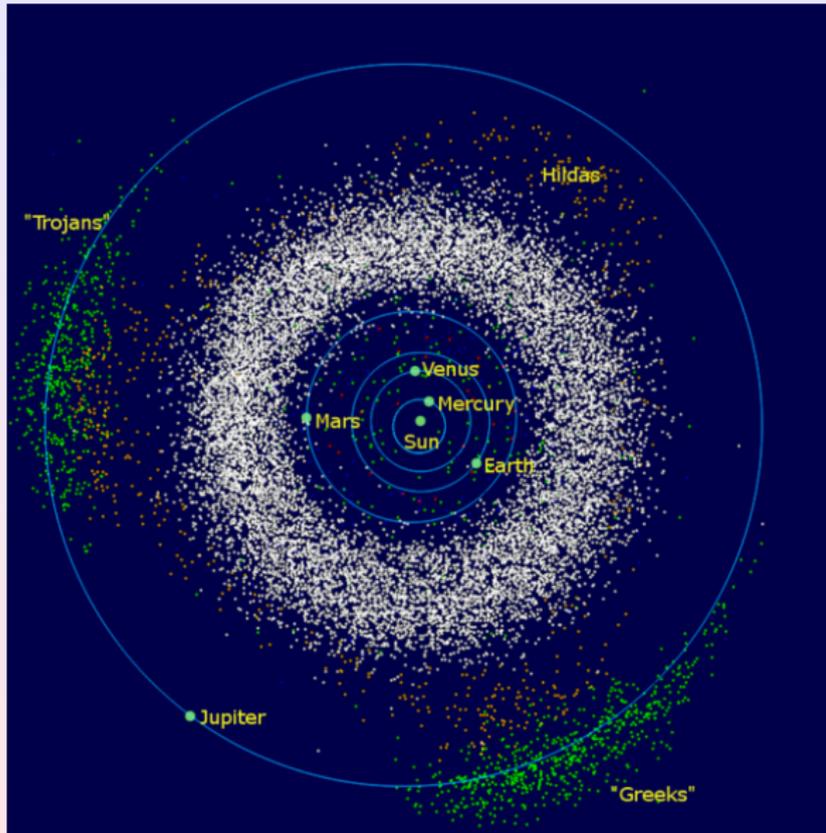
D'après un th. de Moser :

- L_1, L_2, L_3 : instables.
- L_4, L_5 : stables.



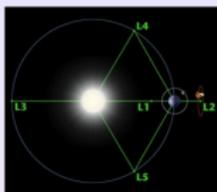
Exemples d'objets aux points de Lagrange

Points L4 et L5 (stables) du système Soleil-Jupiter :
astéroïdes troyens

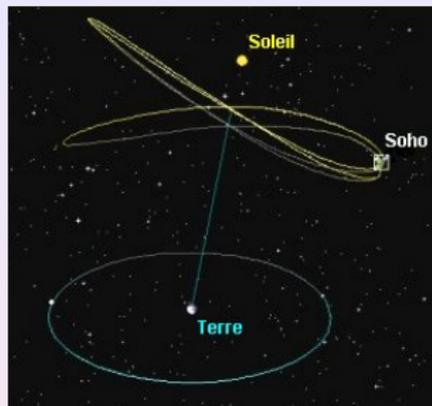


Exemples d'objets aux points de Lagrange

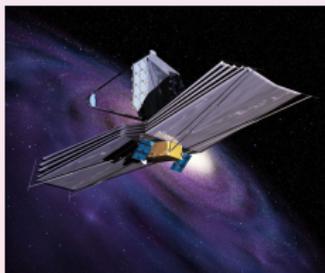
Système
Soleil-Terre :



Point L1 : SOHO



Point L2 : JWST



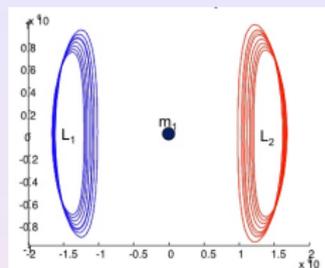
Point L3 : planète X...



Orbites périodiques

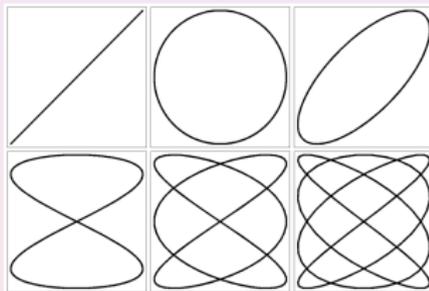
Par un théorème de Lyapunov-Poincaré, il existe :

- une famille à 2 paramètres d'orbites périodiques autour de L_1 , L_2 , L_3 ,
- une famille à 3 paramètres d'orbites périodiques autour de L_4 , L_5 .



Parmi elles :

- des orbites planes appelées **orbites de Lyapunov** ;
- des orbites 3D difféomorphes à des cercles appelées **orbites de halo** ;
- d'autres orbites 3D avec des formes plus compliquées appelées **orbites de Lissajous**.



(Richardson 1980, Gomez Masdemont Simo 1997 1998)

Eight-Lissajous orbits

Approximation par la méthode de Lindstedt-Poincaré :

Les points de Lagrange colinéaires sont du type **col**×**centre**×**centre**, avec valeurs propres $(\pm\lambda, \pm i\omega_p, \pm i\omega_v)$. Les solutions bornées du système linéarisé s'écrivent

$$x(t) = A_x \cos(\omega_p t + \phi)$$

$$y(t) = \kappa A_x \sin(\omega_p t + \phi)$$

$$z(t) = A_z \sin(\omega_v t + \psi)$$

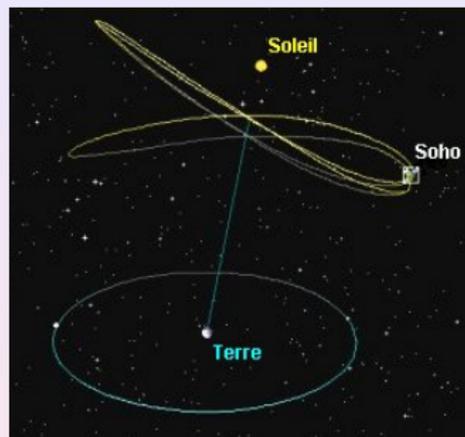
Les termes non linéaires changent les fréquences propres des solutions :

- les orbites de halo sont obtenues en imposant $\omega_p = \omega_v$ (Richardson, 1980)
- les orbites quasi-périodiques sont obtenues lorsque $\omega_p/\omega_v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- les orbites de Lissajous sont obtenues lorsque $\omega_p/\omega_v \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

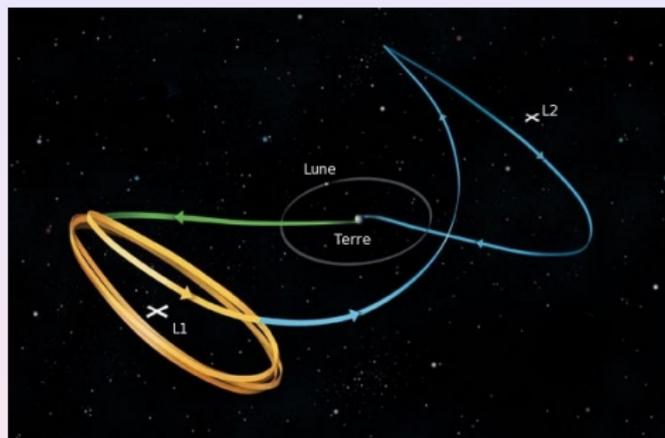
Pour obtenir des orbites en huit, on impose $\omega_p = 2\omega_v$.

Approximation d'ordre 3, utilisée comme initialisation dans une méthode de tir, combinée à une continuation (paramètre d'homotopie : excursion en z ou énergie)
⇒ calcul de familles d'orbites périodiques.

Exemples d'utilisation d'orbites de halo :



Orbite de Soho autour de L1



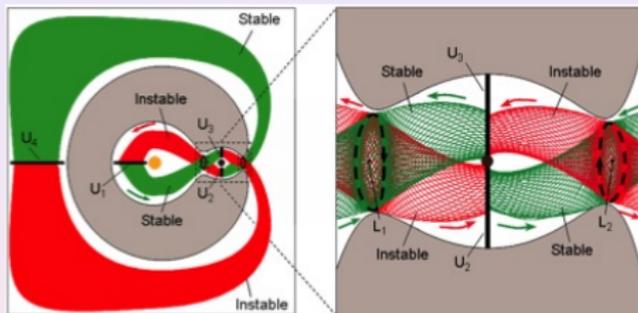
Orbite de la sonde Genesis (2001–2004)

(requiert du contrôle par stabilisation)

Variétés invariantes

Variétés invariantes (stables et instables) des orbites périodiques :
tubes de dimension 4 ($S^3 \times \mathbb{R}$) dans la variété d'énergie de dimension 5
(jouent le rôle de **séparatrices**)

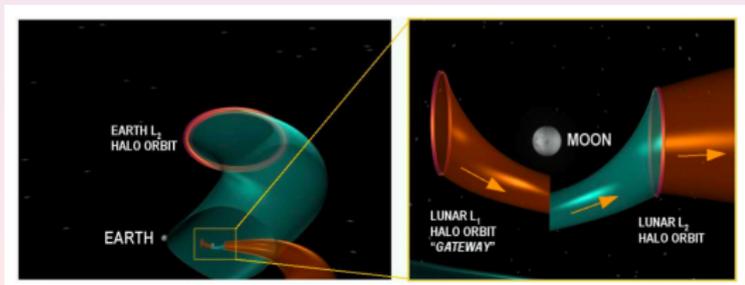
-> "tubes" invariants, sortes de "couloirs de gravité" \Rightarrow trajectoires gratuites



Calcul :

En tout point P d'une orbite périodique, calculer les vecteurs propres $V(P)$ correspondant aux valeurs propres réelles de la matrice de monodromie en P qui sont $\neq 1$.

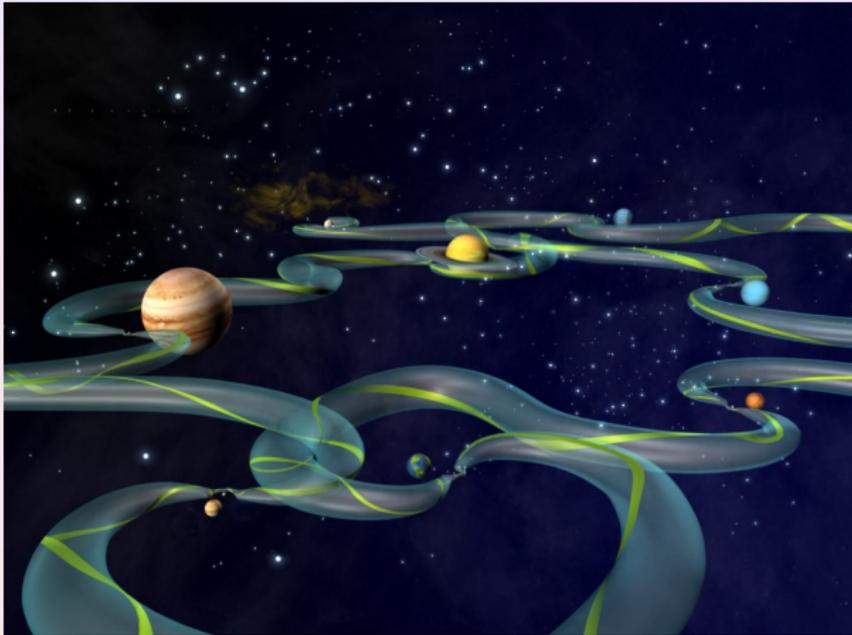
Puis propager $X_0 = P + \epsilon V(P)$.



Variétés invariantes

Variétés invariantes (stables et instables) des orbites périodiques :
tubes de dimension 4 ($S^3 \times \mathbb{R}$) dans la variété d'énergie de dimension 5
(jouent le rôle de **séparatrices**)

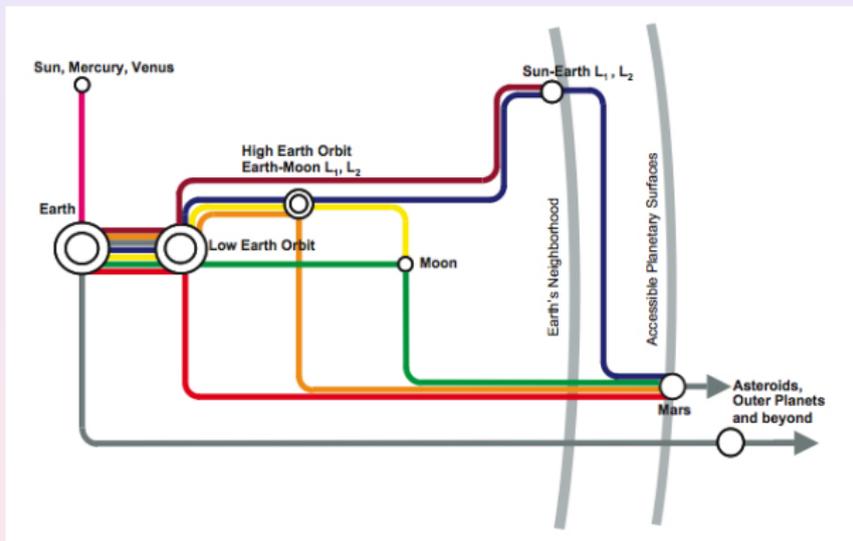
-> "tubes" invariants, sortes de "couloirs de gravité" \Rightarrow trajectoires gratuites



Variétés invariantes

Variétés invariantes (stables et instables) des orbites périodiques :
tubes de dimension 4 ($S^3 \times \mathbf{R}$) dans la variété d'énergie de dimension 5
(jouent le rôle de **séparatrices**)

-> "tubes" invariants, sortes de "couloirs de gravité" \Rightarrow trajectoires gratuites



Cartographie \Rightarrow missions interplanétaires à bas coût



Retour sur la Lune

⇒ base lunaire : point intermédiaire pour des missions interplanétaires

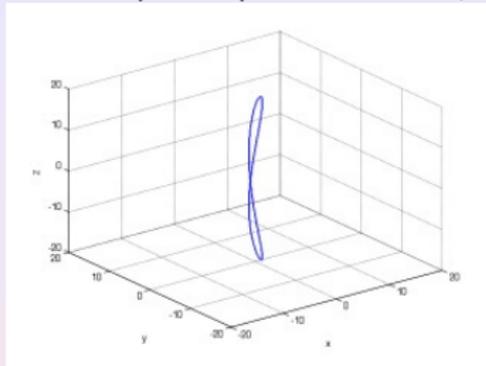
Challenge : construire des orbites à bas coût survolant l'ensemble de la surface de la Lune.

Outils mathématiques :
théorie des systèmes dynamiques, géométrie différentielle,
théorie ergodique, contrôle, calcul scientifique, optimisation

Orbites de Lissajous en 8

(thèse de G. Archambeau, 2008)

Orbites périodiques autour de L_1 et L_2 (système Terre-Lune) ayant la forme d'un 8 :

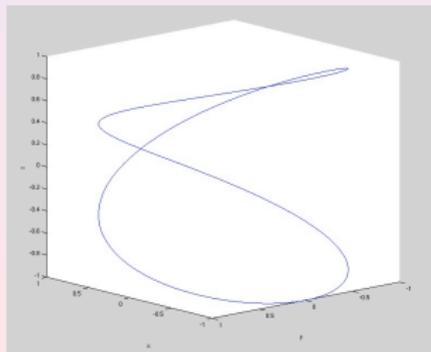


Elles sont difféomorphes à la courbe paramétrique 3D :

$$x(t) = \cos(2t)$$

$$y(t) = \sin(2t)$$

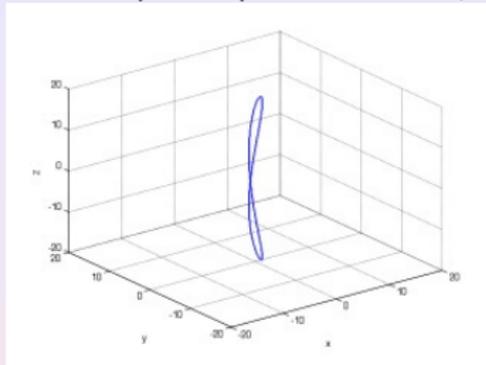
$$z(t) = \sin(t)$$



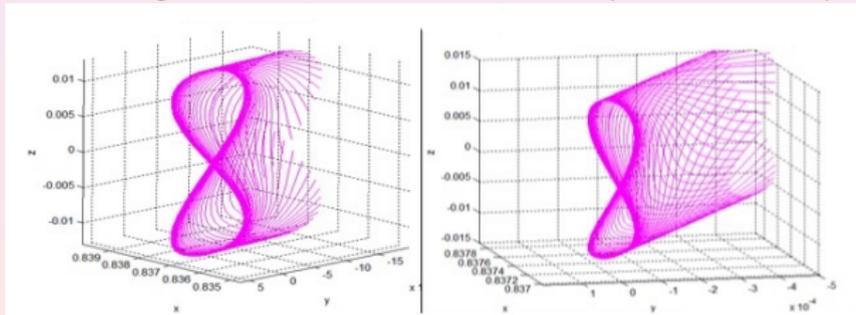
Orbites de Lissajous en 8

(thèse de G. Archambeau, 2008)

Orbites périodiques autour de L_1 et L_2 (système Terre-Lune) ayant la forme d'un 8 :



⇒ Elles engendrent des variétés invariantes (tubes invariants) en forme de 8 :

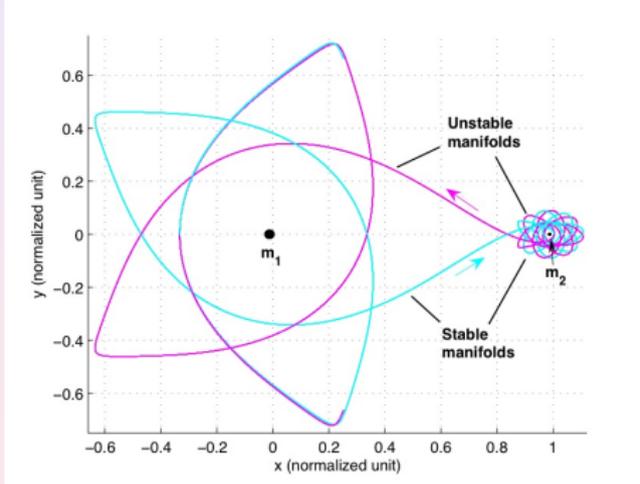


Variétés invariantes des orbites en 8

On observe numériquement deux bonnes propriétés :

1) Stabilité en temps long des variétés invariantes

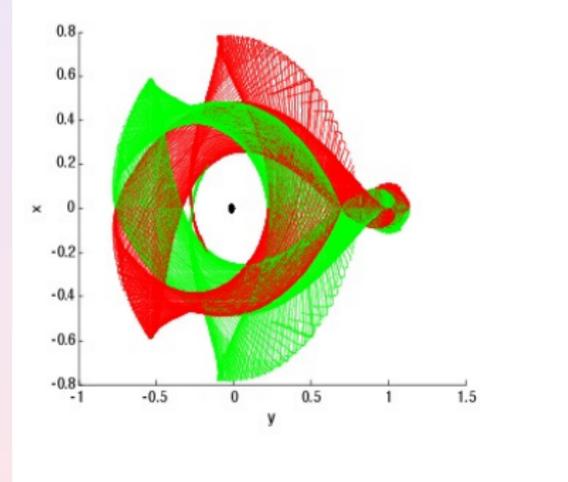
Variétés invariantes d'une orbite en 8 :



→ structure globale conservée

(vérification numérique par calcul d'exposants de Lyapunov locaux)

Variétés invariantes d'une orbite de halo :



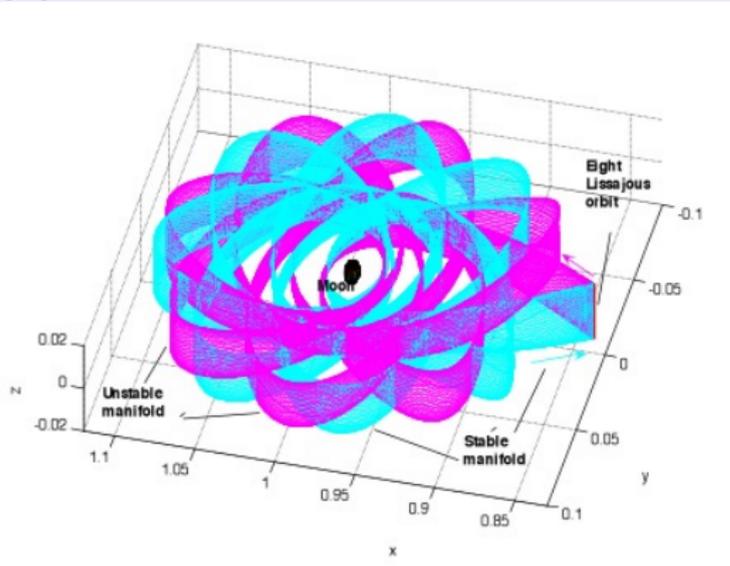
→ structure chaotique en temps long

Variétés invariantes des orbites en 8

On observe numériquement deux bonnes propriétés :

2) Survol de la quasi-totalité de la surface de la Lune

Variétés invariantes d'une orbite en 8, autour de la Lune :



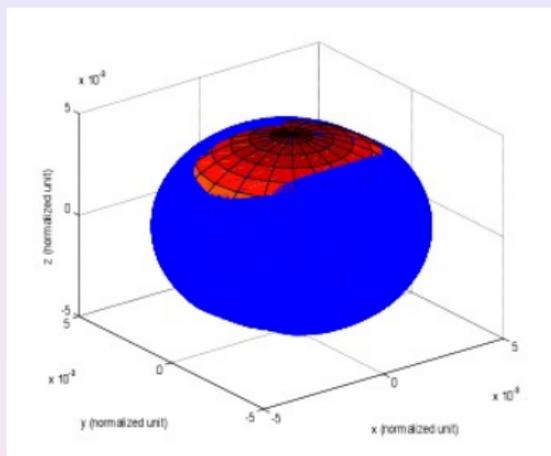
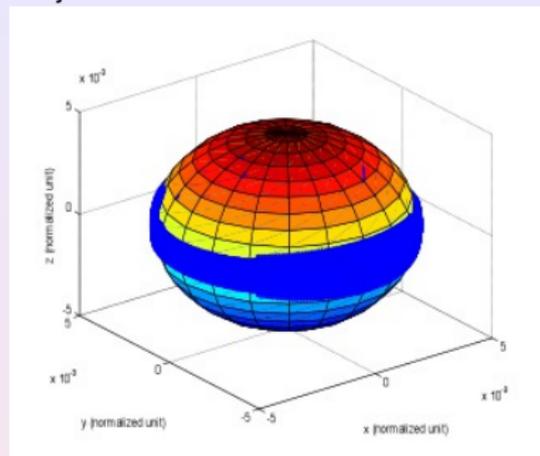
- oscillations autour de la Lune
- stabilité globale en temps long
- distance minimale à la Lune : 1500 km.



G. Archambeau, P. Augros, E. Trélat,
Eight Lissajous orbits in the Earth-Moon system,
MathS in Action (2011).

Variétés invariantes des orbites en 8

Projection des variétés invariantes sur la surface lunaire :



Perspectives

- Analyse de missions utilisant les propriétés des orbites de Lissajous en huit
- Visiter presque toute la Lune à bas coût
- Comment rejoindre optimalement une orbite en huit depuis la Terre ?
- Compromis entre le bas coût et le temps long

- Utilisation des courants de gravité :
 - Missions cargo "low-cost" vers la Lune
 - Missions interplanétaires : compromis entre bas coût et temps de parcours long ; effets gravitationnels (swing-by)
→ thèse de **Maxime Chupin** (2016)
- Ramassage des débris spatiaux (urgent ! trop tard ?)
- Optimal design :
 - Conception optimale de véhicules spatiaux
 - Placement optimal de capteurs, d'actionneurs → ergodicité quantique...
- Problèmes inverses : reconstruction d'environnement thermique, acoustique, électromagnétique (couplages EDO/EDP)
- Problèmes de robustesse, modélisation aléatoire, incertitudes, ...
- ...